

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Gregor Šulgaj

H-Razcvet

DIPLOMSKO DELO
INTERDISCIPLINARNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE
STOPNJE RAČUNALNIŠTVA IN MATEMATIKE

MENTOR: izred. prof. dr. Gašper Jaklič

Ljubljana, 2014

Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko in Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Za objavljjanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko, Fakultete za matematiko in fiziko ter mentorja.

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil \LaTeX .

Fakulteta za računalništvo in informatiko in Fakulteta za matematiko in fiziko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

V diplomski nalogi obravnavajte h -razcvet. Gre za posplošitev razcveta, ki je močno orodje za delo z Bézierovimi krivuljami. Z vpeljavo dodatnega parametra h dobimo zvezo med Bernsteinovo aproksimacijo in Lagrange-ovo interpolacijo. V nalogi obravnavajte lastnosti h -razcveta in algoritem za izračun vrednosti. Rezultate implementirajte v primernem programskem jeziku.

IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisani Gregor Šulgaj, z vpisno številko **63080169**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

H-Razcvet

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom izred. prof. dr. Gašperja Jakliča,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela v zbirki "Dela FRI".

V Ljubljani, dne 1. maja 2014

Podpis avtorja:

Rad bi se zahvalil mentorju izred. prof. dr. Gašperju Jakliču za strokovno podporo pri izdelavi diplomske naloge, moji Maji Ani, družini, soplezalki Petri, prijatelju Jonu in zverci Ambri za splošno podporo pri izdelavi diplomske naloge. Najbolj se zahvaljujem gospe Metki Runovec za vse, kar je bilo treba urediti na referatu.

Posvečam vsem dobrim.

Kazalo

Povzetek

Abstract

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Uvod | 1 |
| 2 | Osnovni elementi | 3 |
| | Bernsteinov bazni polinom | 3 |
| | Bézierova krivulja | 3 |
| | de Casteljauov algoritem | 5 |
| | Razcvet | 6 |
| 3 | Parameter h | 9 |
| | Dodajanje parametra h | 9 |
| | h -Bernsteinova bazna funkcija | 10 |
| | h -Bézierova krivulja | 11 |
| | h -de Casteljauov algoritem | 12 |
| 4 | h-Razcvet | 13 |
| | Dualna funkcijska lastnost | 14 |
| | Obstoj in enoličnost h -razcveta | 14 |
| | Rekurzivni algoritem in identitete | 16 |
| 5 | Algoritem | 25 |
| | Inicializacija parametrov | 25 |

KAZALO

| | |
|-----------------------------|-----------|
| Glavni algoritem | 26 |
| Pomožna funkcija | 28 |
| Rezultat | 28 |
| 6 Sklepne ugotovitve | 31 |
| Literatura | 33 |

Povzetek

V diplomski nalogi se bomo dotaknili teme iz računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja, katerega namen je zapisati enostavne in tudi bolj zahtevne krivulje v jezik, ki ga računalnik razume. Opisali bomo nekaj osnovnih gradnikov, kot so na primer Bernsteinov polinom, Bézierova krivulja, de Casteljauov algoritem in razcvet. Bolj podrobno bomo opisali in raziskali novo različico razcveta, ki ga imenujemo *h-razcvet*. Dodani parameter h vpliva na lastnost diagonale osnovnega razcveta in nam omogoča dodatni nadzor nad obliko krivulje. Ogledali si bomo splošne lastnosti *h-razcveta*, ki jih bomo izpeljali iz osnovnega razcveta. Seveda se bomo lotili tudi razvoja ustreznega algoritma, ki nam bo pomagal pri računanju in oblikovanju krivulje.

Ključne besede: računalniško podprto geometrijsko oblikovanje, razcvet, Bézierova krivulja, Bernsteinov bazni polinom, de Casteljauov algoritem.

Abstract

In the thesis we will consider a topic in computer aided geometric design, which studies curves in a form understandable by computer. We will describe some basic building blocks such as Bernstein basis function, Bézier curve, de Casteljau's algorithm and blossom. Moreover we will be describing a new variant of the blossom, the *h-blossom*. The *h-blossom* is introduced by altering diagonal property of the standard blossom which enables us to have more control over the shape of the curve. We will continue the thesis by studying properties of *h-blossom*. In the end, we will present an algorithm for computing the *h-blossom*.

Key words: computer aided geometric design, blossom, Bézier curve, Bernstein basis polynomial, de Casteljau algorithm.

Poglavje 1

Uvod

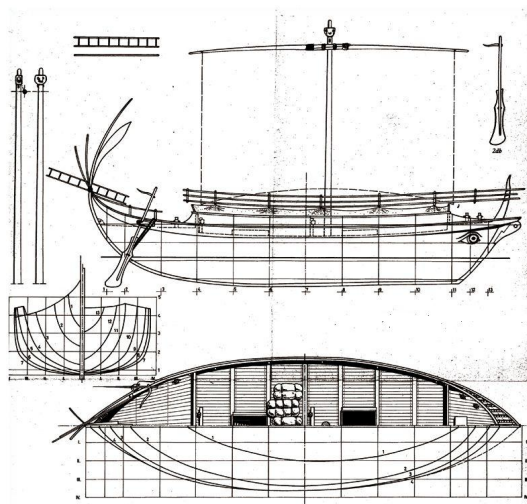
Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje se je razvilo predvsem zaradi potrebe po poustvarjanju in oblikovanju krivulj v industrijske namene. Že v rimskih časih so v ladjedelstvu uporabljali lesene šablone, s katerimi so na primer oblikovali rebra ladij. Prednost tega je, da so šablono lahko večkrat uporabili. S tem se je ohranila osnovna geometrija ladje oziroma načrt, ki so ga lahko uporabili tudi kasneje. To tehniko so izpopolnili Benečani med 13. in 16. stoletjem. Obliko trupa ladje so dobili s spreminjanjem oblike reber vzdolž ladijskega gredlja. Tej tehniki rečemo danes oblikovanje ploskev s pomočjo tenzorskega produkta. Prve risbe načrtov so našli v Angliji okoli leta 1600. Mnogo let kasneje, leta 1944, je Roy Liming napisal knjigo z naslovom Analitična geometrija z uporabo na letalih. V tej knjigi je prvič združil klasično metodo uporabe risb z uporabo računskih algoritmov. Prednost je v tem, da je ta alternativa bolj jasna in enolična, ker lahko številke shranimo v pregledne tabele. S tem se tudi izniči možnost osebne interpretacije narisane načrta.

V avtomobilski industriji sta se s problemom predstavitve krivulj na računalniku ukvarjala dva francoska znanstvenika. Pri Citroënu je delal matematik Paul de Faged de Casteljau, ki je uporabljal Bernsteinove bazne funkcije in postopek, ki mu danes rečemo de Casteljaujev algoritem. Razvil je način predstavitve krivulje v računalniku z uporabo kontrolnega poligona.

Namesto določanja krivulje s pomočjo točk na krivulji, je krivulja podana s kontrolnim poligonom, ki ima točke blizu te krivulje. Pri Renaultu je podobno tehniko razvijal Pierre Bézier. Rezultati njegove metode so bili identični de Casteljaujevi metodi, le način računanja je bil drugačen. Raziskave de Casteljauja niso bile objavljene. Citroën jih je skrival kot poslovno skrivnost, medtem ko so bile raziskave Béziera dostopne javnosti. Zato se v tej panogi bolj pogosto srečamo z njegovim imenom.

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje je geometrijsko oblikovanje s pomočjo računalnika. Uporablja se na področju geometrijskega in industrijskega oblikovanja, modeliranja, v računalniških igrich in filmih.

V nadaljevanju bomo v Poglavju 2 spoznali osnovne gradnike računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja. To so Bernsteinov bazni polinom, Bézierjeva krivulja, de Casteljaujev algoritem in razcvet. Z uporabo in nadgradnjo teh elementov bomo prišli do h -razcveta. V diplomski nalogi bomo obravnavali njegove lastnosti in ga implementirali v programskem jeziku Matlab. Algoritem bomo podrobneje opisali v Poglavju 5.



Slika 1.1: Ladja.

Poglavje 2

Osnovni elementi

Bernsteinov bazni polinom

i -ti Bernsteinov bazni polinom stopnje n je definiran z:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Za Bernsteinove bazne polinome je značilno, da tvorijo *particijo enote*:

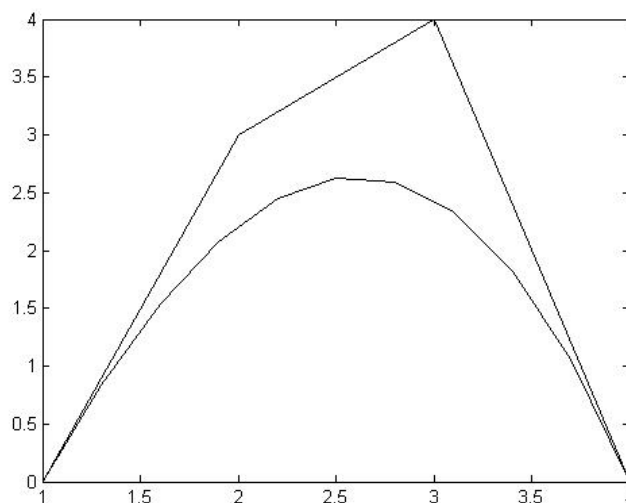
$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1, \quad B_j^n(t) \geq 0. \quad (2.2)$$

Bézierova krivulja

Naj bodo dane točke $b_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 0, 1, \dots, n$. Bézierova krivulja je definirana tako:

$$b^n(t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t).$$

Točke b_j imenujemo Bézierove kontrolne točke. Če jih povežemo, dobimo poligon, ki ga imenujemo Bézierov kontrolni poligon. Krivulji $b^n(t)$ rečemo tudi **Bernstein-Bézierova aproksimacija** kontrolnega poligona.



Slika 2.1: Bézierova krivulja v konveksni ovojnici svojega kontrolnega poligona.

Lastnosti Bézierovih krivulj:

Afina invarianca

Bézierova krivulja je invariantna na afine preslikave. Isto krivuljo dobimo, če najprej izračunamo točko $b^n(t)$ in na njej izvedemo afino preslikavo, ali pa najprej uporabimo afino preslikavo na kontrolnem poligonu in nato na podlagi novega kontrolnega poligona izračunamo točko na krivulji.

Konveksna ovojnica

Konveksna ovojnica danih točk je množica točk, ki jih tvorijo vse konveksne kombinacije teh točk. Bézierova krivulja $b^n(t)$ leži v konveksni ovojnici svojega kontrolnega poligona. To sledi iz dejstva, da so za $t \in [0, 1]$ Bernsteinovi polinomi nenegativni in se po enačbi (2.2) seštevajo v 1.

Interpolacija v robnih točkah

Bézierova krivulja poteka skozi točki $b_0 = b^n(0)$ in $b_n = b^n(1)$.

Simetrija

Če namesto zaporedja kontrolnih točk b_0, b_1, \dots, b_n uporabimo zaporedje b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 , dobimo isto krivuljo.

de Casteljauov algoritem

Z de Casteljauovem algoritmom pridemo do geometrijske konstrukcije Bézierovih krivulj. Je eno najosnovnejših orodij za oblikovanje krivulj in ploskev.

Algoritem: podane so kontrolne točke $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^3$ in $t \in \mathbb{R}$. Izračunamo:

$$b_i^r(t) = (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad \text{in} \quad i = 0, 1, \dots, n-r. \quad (2.3)$$

Točke $b_i^0(t)$ so kontrolne točke b_i . Točka, ki jo izračunamo z algoritmom $b_0^n(t)$, je točka na krivulji pri vrednosti parametra t . Za boljšo predstavitev algoritma vmesne točke $b_i^r(t)$ zapišemo v trikotno shemo, ki ji rečemo de Casteljauova shema.

$$\begin{array}{cccc} & & & b_0^0 \\ & & & b_1^0 \quad b_0^1 \\ & & b_2^0 \quad b_1^1 \quad b_0^2 \\ & b_3^0 \quad b_2^1 \quad b_1^2 \quad b_0^3 \end{array}$$

Slika 2.2: De Casteljauova shema v kubičnem primeru, kjer je $b_i^0 = b_i$ i -ta kontrolna točka in $b_0^3(t)$ točka na Bézierovi krivulji b^3 pri vrednosti parametra t .

De Casteljauov algoritem je v splošnem ponavljanje linearnih interpolacij.

Razcvet

Razcvet je posplošitev de Casteljauovega algoritma. Dobimo ga tako, da izračunamo n stolpcev de Casteljauove sheme in v r -tem stolpcu namesto vrednosti parametra t vstavimo nek novi t_r . Rezultat za kubični primer je točka $b_0^3[t_1, t_2, t_3]$, ki je funkcija treh neodvisnih spremenljivk. Funkcijo $b[\cdot, \cdot, \cdot]$ imenujemo razcvet Bézierove krivulje.

$$\begin{array}{cccc} b_0^0 & & & \\ b_1^0 & b_0^1[t_1] & & \\ b_2^0 & b_1^1[t_1] & b_0^2[t_1, t_2] & \\ b_3^0 & b_2^1[t_1] & b_1^2[t_1, t_2] & b_0^3[t_1, t_2, t_3] \end{array}$$

Slika 2.3: De Casteljauova shema v kubičnem primeru za razcvet, kjer je $b_i^0 = b_i$ (i -ta kontrolna točka). Točka $b_0^3[t_1, t_2, t_3]$ je točka, ki leži v konveksni ovojnici kontrolnega poligona Bézierove krivulje b^3 pri vrednosti parametrov $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$.

Lastnosti razcveta

1. Razcvet je simetrična funkcija:

$$b[t_1, \dots, t_n] = b[t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}], \quad (2.4)$$

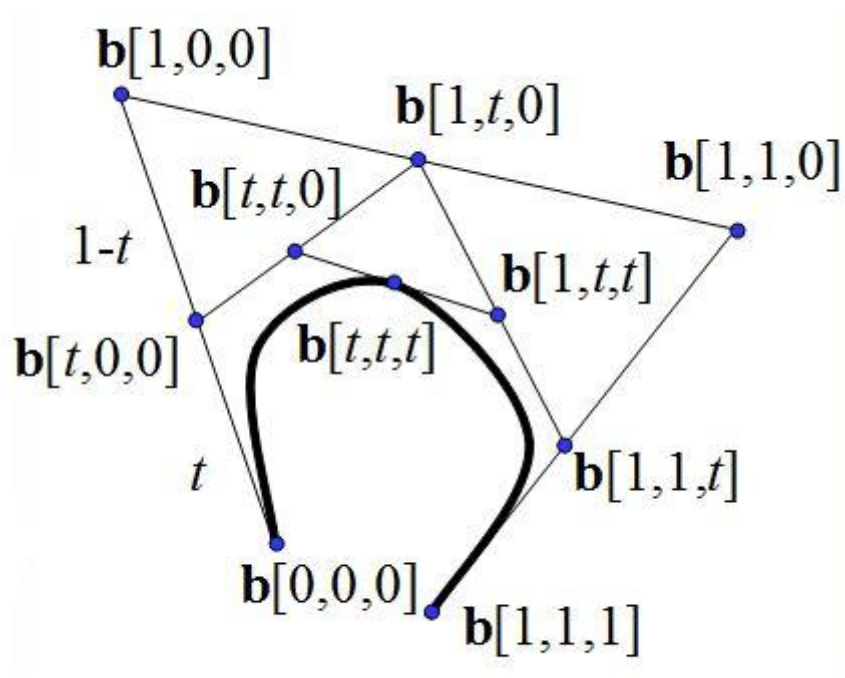
za vsako permutacijo σ množice $\{1, \dots, n\}$.

2. Razcvet je multiafin in za $\alpha + \beta = 1$ velja:

$$b[t_1, \dots, \alpha t_k + \beta u_k, \dots, t_n] = \alpha b[t_1, \dots, t_k, \dots, t_n] + \beta b[t_1, \dots, u_k, \dots, t_n]. \quad (2.5)$$

3. Diagonalna lastnost:

$$b[\underbrace{t, t, \dots, t}_n] = b(t). \quad (2.6)$$



Slika 2.4: [2]. Razcvet je definiran z $b[t_1, t_2, t_3]$.

Na sliki 2.4 opazimo, da pri ustreznih vrednostih parametrov t_1, t_2, t_3 velja:

Kontrolne točke b_i za $i = 0, 1, \dots, n$ dobimo tako:

$$b_i = b[\underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i].$$

V našem primeru velja $b_0 = b[0, 0, 0]$, $b_1 = b[0, 0, 1]$, $b_2 = b[0, 1, 1]$ in $b_3 = b[1, 1, 1]$.

Vmesne točke b_i^r za $r = 1, 2, \dots, n$ in $i = 0, 1, \dots, r - n$ dobimo tako:

$$b_i^r(t) = [\underbrace{0, \dots, 0}_{n-r-i}, \underbrace{t, \dots, t}_r, \underbrace{1, \dots, 1}_i].$$

V našem primeru velja $b_1^1(t) = b[1, t, 0]$, $b_2^1(t) = b[1, 1, t]$, $b_0^2(t) = b[t, t, 0]$ in $b_1^2(t) = b[1, t, t]$, pri vrednosti parametra $t \in [0, 1]$.

Točke na krivulji $b_0^n(t)$ dobimo kot:

$$b_0^n(t) = b[\underbrace{t, \dots, t}_n].$$

V našem primeru velja $b_0^3 = b[t, t, t]$.

Poglavje 3

Parameter h

Dodajanje parametra h

Bernsteinovemu baznemu polinomu dodamo parameter h in za $t \in [0, 1]$ dobimo h -Bernsteinov bazni polinom:

$$B_k^n(t; h) = \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (t + ih) \prod_{i=0}^{n-k-1} (1 - t + ih)}{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + ih)} \text{ za } k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Če vstavimo vrednost parametra $h = 0$, opazimo, da z malo računanja dobimo osnovni Bernsteinov bazni polinom (2.1).

Za $t \in [0, 1]$ izrazimo h -Bézierovo krivuljo:

$$b(t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t; h) b_k.$$

Za $h \geq 0$ si h -Bézierova krivulja deli veliko lastnosti z osnovno Bézierovo krivuljo (ko je $h = 0$). Na primer afino invariantnost in lastnost, da je krivulja v celoti vsebovana v konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk. To bomo pokazali v naslednjih razdelkih.

h -Bernsteinova bazna funkcija

h -Bernsteinova bazna funkcija je na poljubnem intervalu $[a, b]$ definirana kot:

$$B_k^n(t; [a, b]; h) = \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (t - a + ih) \prod_{i=0}^{n-k-1} (b - t + ih)}{\prod_{i=0}^{n-1} (b - a + ih)} \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Vrednosti parametra h v enačbi (3.2), kjer velja $b = a - jh$, zaradi deljenja z 0 za nekatere $0 \leq j \leq n - 1$ izpustimo.

Opazujmo posebne primere:

1. Ko je $a = 0$ in $b = 1$, se enačba (3.2) pretvori v enačbo (3.1) za standardno h -Bernsteinovo bazno funkcijo na intervalu $[0, 1]$.
2. Ko je $h = 0$, se enačba (3.2) poenostavi v standardno Bernsteinovo bazno funkcijo na intervalu $[a, b]$.
3. Ko je $b = a - nh$, je enačba (3.2) enaka Lagrangeovi bazni funkciji stopnje n za vozlišča $a, a - h, \dots, a - nh$.

Dokaz za prvi dve točki je enostaven. V enačbo (3.2) samo vstavimo ustrezne vrednosti in jo poenostavimo. Dokaz za točko 3 sledi v nadaljevanju.

h -Bernsteinova bazna funkcija ima naslednje lastnosti:

- h -Bernsteinova bazna funkcija je invariantna na translacije:

$$B_k^n(t + c; [a + c, b + c]; h) = B_k^n(t; [a, b]; h) \quad \text{za vsak } c.$$

- h -Bernsteinova bazna funkcija je invariantna na skaliranje:

$$B_k^n(ct; [ca, cb]; ch) = B_k^n(t; [a, b]; h) \quad \text{za vsak } c \neq 0.$$

Če naredimo translacijo za $-a$ in potem skaliramo z $1/(b-a)$, dobimo:

$$B_k^n(t; [a, b]; h) = B_k^n\left(\frac{t-a}{b-a}; [0, 1]; \frac{h}{b-a}\right) = B_k^n\left(\frac{t-a}{b-a}; \frac{h}{b-a}\right).$$

h -Bernsteinove bazne funkcije tvorijo particijo enote, so baza za prostor polinomov stopnje največ n in so nenegativne za vse $h \geq 0$ in $a \leq t \leq b$. Lahko jih zapišemo z rekurzijo:

$$\begin{aligned} B_0^0(t; [a, b]; h) &= 1, \\ B_k^n(t; [a, b]; h) &= \\ &= \frac{t-a+(k-1)h}{b-a+(n-1)h} B_{k-1}^{n-1}(t; [a, b]; h) + \frac{b-t+(n-k-1)h}{b-a+(n-1)h} B_k^{n-1}(t; [a, b]; h). \end{aligned}$$

h -Bézierova krivulja

Parameter h določa obliko h -Bézierove krivulje na intervalu $[a, b]$. Ko večamo vrednost parametra $h > 0$, se krivulja čedalje bolj približuje daljici, ki povezuje začetno in končno točko kontrolnega poligona. Nasprotno, ko manjšamo $h < 0$, se premica oddaljuje od te daljice. Pri vrednosti $h = -(b-a)/k$ za $k = (n-1), \dots, 1$ se zgodi posebnost, ko se krivulja spet začne bližati tej daljici.

Poleg lastnosti, da parameter h vpliva na obliko krivulje, imajo h -Bernsteinovi bazni polinomi in h -Bézierove krivulje tudi druge lastnosti primerne za uporabo v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju. Če vzamemo vrednost $h = -(b-a)/n$, dobimo Lagrangeovo bazno funkcijo, za vrednost $h = 0$ pa Bézierovo aproksimacijo. Iz tega sledi, da parameter h predstavlja naravni prehod med interpolacijo in aproksimacijo za polinomske krivulje. h -Bézierove krivulje se uporabljajo tudi pri analizi B -zlepkov.

h -Bézierova krivulja stopnje n na intervalu $[a, b]$ s kontrolnimi točkami

b_0, \dots, b_n je polinomska krivulja, definirana z:

$$b(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t; [a, b]; h), \quad t \in [a, b]$$

Če skaliramo dolžino $\Delta := b - a$ s konstanto c , in hkrati ne skaliramo parametra h , dobimo drugo krivuljo.

h-de Casteljauov algoritem

Za $k = 0, \dots, n$ nastavimo vrednosti $b_k^0(t) = b_k$.

for $r = 1, \dots, n$

for $k = 0, \dots, n - r$

$$b_k^r(t) = \frac{b - t + (n - r - k)h}{b - a + (n - r)h} b_k^{r-1}(t) + \frac{t - a + kh}{b - a + (n - r)h} b_{k+1}^{r-1}(t)$$

Velja, da je $b(t) = b_0^n(t)$ točka na h -Bézierovi krivulji z vrednostjo parametra $t \in [a, b]$. Opazimo, da če je parameter $h = 0$, se enačba preoblikuje v standardni de Casteljauov algoritem za Bézierove krivulje.

Poglavje 4

h-Razcvet

Iz razcveta so razvite tehnike za izpeljavo identitet in razvijanje algoritmov za standardne Bernsteinove baze in Bézierove krivulje. Posebna različica razcveta je *h-razcvet*, s katerim analiziramo lastnosti *h-Bernsteinovih baz* in *h-Bézierovih krivulj*.

h-razcvet polinoma $b(t)$ stopnje n je enoličen simetričen multiafin polinom $b[u_1, \dots, u_n; h]$, ki je vzdolž *h-diagonale* enak polinomu $b(t)$. To pomeni, da je $b[u_1, \dots, u_n; h]$ enoličen polinom več spremenljivk, ki zadošča naslednjim trem zahtevam:

1. *h-razcvet* je simetrična funkcija:

$$b[u_1, \dots, u_n; h] = b[u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}; h],$$

za vsako permutacijo σ množice $\{1, \dots, n\}$.

2. *h-razcvet* je multiafin in za $\alpha + \beta = 1$ velja:

$$\begin{aligned} b[u_1, \dots, \alpha u_k + \beta v_k, \dots, u_n; h] &= \alpha b[u_1, \dots, u_k, \dots, u_n; h] + \\ &+ \beta b[u_1, \dots, v_k, \dots, u_n; h]. \end{aligned}$$

3. Lastnost *h-diagonale*:

$$b[t, t - h, \dots, t - (n - 1)h; h] = b(t).$$

Omenimo tudi, da je lastnost, da je h -razcvet polinom multiafin, enakovredna dejstvu, da se vsaka spremenljivka u_1, \dots, u_n pojavi na največ prvo potenco. To pomeni, da je $b[u_1, \dots, u_n; h]$ linearen polinom v vsaki spremenljivki. h -razcvetu polinoma rečemo tudi h -polarna oblika polinoma.

Dualna funkcijska lastnost

Ta lastnost nam omogoča, da z ustrezno izbiro vrednosti parametrov h -razcveta izračunamo kontrolne točke. S pomočjo dualne funkcijske lastnosti bomo pokazali povezavo med h -razcvetom polinomske krivulje in kontrolnih točk h -Bézierove krivulje.

Naj bo $b(t)$ h -Bézierova krivulja stopnje n na intervalu $[a, b]$ s kontrolnimi točkami b_1, \dots, b_n . Naj bo $b[u_1, \dots, u_n; h]$ h -razcvet krivulje $b(t)$. Potem velja:

$$b_k = b[\underbrace{a - kh, \dots, a - (n-1)h}_{n-k}, \underbrace{b, \dots, b - (k-1)h}_k; h], \quad k = 0, \dots, n.$$

Obstoj in enoličnost h -razcveta

Izpeljevanje eksplicitnih formul za h -razcvet monomov splošne stopnje ni enostavno. Zato bomo obstoj in enoličnost h -razcveta pokazali s pomočjo druge polinomske baze.

Naj bo polinom definiran z:

$$\phi_n(t; h) = \prod_{i=1}^n (t - (i-1)h).$$

Potem je:

$$\phi_n^{(k)}(t; h)/k! = \sum_{i \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \prod_{l=1}^{n-k} (t - (i_l - 1)h), \quad k = 0, \dots, n.$$

Naj bo:

$$\phi_{n,k}(t; h) = \phi_n^{(n-k)}(t; h)/(n-k)!, \quad k = 0, \dots, n.$$

Potem velja za vsak k , da je $\phi_{n,k}(t; h)$ polinom stopnje natanko k . Zato polinomi $\{\phi_{n,k}(t; h)\}_{k=0}^n$ tvorijo bazo za prostor polinomov stopnje največ n .

Naj bo:

$$\phi_{n,k}[u_1, \dots, u_n] = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} u_{i_1} \cdots u_{i_k}.$$

Potem je desna stran enačbe simetrična, multiafina funkcija, ki je vzdolž h -diagonale enaka polinomu $\phi_{n,k}(t; h)$. Opazimo, da je desna stran enačbe k -ta elementarna simetrična funkcija n spremenljivk.

Izrek 4.1 (*Obstoj in enoličnost h -razcveta*). Za vsak polinom $b(t)$ stopnje n obstaja enolično določena, simetrična in multiafina funkcija $b[u_1, \dots, u_n; h]$, ki je vzdolž h -diagonale enaka polinomu $b(t)$. To pomeni, da za vsak polinom $b(t)$ obstaja enolično določen h -razcvet $b[u_1, \dots, u_n; h]$.

Dokaz. Naj bo $b(t)$ polinom stopnje n . Potem lahko $b(t)$ napišemo kot $b(t) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_{n,k}(t; h)$. Funkcija

$$b[u_1, \dots, u_n; h] = \sum_{k=0}^n c_k \phi_{n,k}[u_1, \dots, u_n]$$

je h -razcvet polinoma $b(t)$, saj je h -razcvet $b[\cdot, \cdot, \cdot; h]$ simetričen, multiafin in je vzdolž h -diagonale enak polinomu $b(t)$.

Zdaj bomo dokazali še enoličnost h -razcveta. Recimo, da za polinom $b(t)$ stopnje n obstajata dva h -razcveta $b[u_1, \dots, u_n; h]$ in $b'[u_1, \dots, u_n; h]$. Ker ima vsak simetričen in multiafin polinom $b(t)$ stopnje n enolično določeno predstavitev z $n+1$ elementarnimi in simetričnimi funkcijami n spremenljivk, obstajajo konstante p_0, \dots, p_n in r_0, \dots, r_n , tako da velja:

$$b[u_1, \dots, u_n; h] = \sum_{k=1}^n p_k \phi_{n,k}[u_1, \dots, u_n]$$

in

$$b'[u_1, \dots, u_n; h] = \sum_{k=1}^n r_k \phi_{n,k}[u_1, \dots, u_n].$$

Če računamo po lastnosti h -diagonale $u_i = t - (i - 1)h$, $i = 1, \dots, n$, ugotovimo:

$$b(t) = \sum_{k=0}^n p_k \phi_{n,k}(t; h) = \sum_{k=0}^n r_k \phi_{n,k}(t; h).$$

Zato velja, da je $p_k = r_k$ za vse $k = 1, \dots, n$. Iz tega sledi, da je

$$b[u_1, \dots, u_n; h] = b'[u_1, \dots, u_n; h].$$

S tem smo dokazali, da je h -razcvet enolično določen za polinom $b(t)$. \square

Rekurzivni algoritem in identitete

Spodaj je opisan rekurzivni algoritem za izračun splošnih vrednosti h -razcveta. Za izračun uporabimo tudi posebne vrednosti, ki se pojavijo v dualni funkcijski lastnosti h -razcveta.

Izrek 4.2 *Naj bo $b(t)$ polinom z razcvetom $b[u_1, \dots, u_n; h]$. Nastavimo:*

$$Q_i^0 = b[a - ih, \dots, a(n - 1)h, b, b - h, \dots, b - (i - 1)h; h], \quad (4.1)$$

za $i = 0, \dots, n$ in rekurzivno definiramo množico multiafinih funkcij:

$$Q_i^{k+1}[u_1, \dots, u_{k+1}; h] = (1 - \beta_{k,i})Q_i^k[u_1, \dots, u_k; h] + \beta_{k,i}Q_{i+1}^k[u_1, \dots, u_k; h], \quad (4.2)$$

za $i = 0, \dots, n - k - 1$ in $k = 0, \dots, n - 1$, kjer velja:

$$\beta_{k,i} = \frac{u_{k+1} - a + (i + k)h}{b - a + kh}. \quad (4.3)$$

Potem je:

$$Q_i^k[u_1, \dots, u_k; h] = b[a - (k + i)h, \dots, a - (n - 1)h, b, b - h, \dots, b - (i - 1)h, u_1, \dots, u_k; h],$$

za $i = 0, \dots, n - k$, $k = 0, \dots, n$. Nazadnje velja:

$$Q_0^n[u_1, \dots, u_n; h] = b[u_1, \dots, u_n; h].$$

Dokaz. Dokažemo z indukcijo po k iz lastnosti simetrije in multiafinosti h -razcveta. \square

Izrek 4.3 *Naj bo $b(t)$ polinom in naj bo $b[u_1, \dots, u_n; h]$ h -razcvet polinoma $b(t)$. Potem obstaja $n!$ afino-invariantnih rekurzivnih algoritmov za izračun $b(t)$ definiranih na naslednji način: Naj bo ϕ permutacija množice $\{1, \dots, n\}$. Nastavimo:*

$$b_i^0 = b[a - ih, \dots, a - (n-1)h, b, b-h, \dots, b - (i-1)h; h], i = 0, \dots, n,$$

rekurzivno definiramo:

$$b_i^{k+1}(t) = (1 - \alpha_{k,i})b_i^k(t) + \alpha_{k,i}b_{i+1}^k(t), i = 0, \dots, n-k-1, \quad (4.4)$$

za $k = 0, \dots, n-1$, kjer je

$$\alpha_{k,i} = \alpha_{k,i}(t) = \alpha_{k,i}(t; \phi; h) = \frac{t - a - (\phi(k+1) - 1 - i - k)h}{b - a + kh}. \quad (4.5)$$

Potem velja:

$$b_i^k(t) = b[a - (k+i)h, \dots, a - (n-1)h, b, b-h, \dots, b - (i-1)h, t - (\phi(1) - 1)h, \dots, t - (\phi(k) - 1)h; h], \quad (4.6)$$

za $i = 0, \dots, n-k$, $k = 0 \dots, n$. Nazadnje velja:

$$b_0^n(t) = b[t - (\phi(1) - 1)h, \dots, t - (\phi(n) - 1)h; h] = b(t).$$

Dokaz. Izrek 4.3 sledi iz izreka 4.2 in sicer tako, da zamenjamo določene vrednosti parametrov h -razcveta: $u_i = t - (\phi(i) - 1)h$, za $i = 1, \dots, n$. \square

Vsaka polinomska krivulja je h -Bézierova krivulja na poljubnem intervalu.

Izrek 4.4 *Naj bo $b(t)$ polinom stopnje n in naj bo $b[u_1, \dots, u_n]$ njegov h -razcvet. Potem velja:*

$$b(t) = \sum_{i=0}^n b[a - ih, \dots, a - (n-1)h, b, b-h, \dots, b - (i-1)h; h] B_i^n(t; [a, b]; h). \quad (4.7)$$

Dokaz. Izrek dokažemo z indukcijo po n . Za $n = 0$ enačba (4.7) velja, ker je $B_0^0(t; [a, b]; h) = 1$. Predpostavimo, da enačba (4.7) velja za polinome stopnje največ $n - 1$ za $n \geq 1$ in naj bo polinom $b(t)$ stopnje n . Po izreku 4.3 in še posebej po enačbi (4.4) z $\phi(k) = k$ za vse k , imamo

$$b(t) = b_0^n(t) = (1 - \alpha_{n-1,0}(t))b_0^{n-1}(t) + \alpha_{n-1,0}(t)b_1^{n-1}(t),$$

kjer po enačbi (4.6) velja:

$$\begin{aligned} b_0^{n-1}(t) &= b[a - (n-1)h, t, t-h, \dots, t-(n-2)h; h], \\ b_1^{n-1}(t) &= b[b, t, t-h, \dots, t-(n-2)h; h]. \end{aligned}$$

Krivulji $b_0^{n-1}(t)$ in $b_1^{n-1}(t)$ imata h -razcveta

$$\begin{aligned} b_0[u_1, \dots, u_{n-1}; h] &= b[a - (n-1)h, u_1, \dots, u_{n-1}; h] \text{ in} \\ b_1[u_1, \dots, u_{n-1}; h] &= b[b, u_1, \dots, u_{n-1}; h], \end{aligned}$$

ker sta desni strani enačb simetrični, multiafini in sta vzdolž h -diagonale enaki polinomoma. Po indukcijski predpostavki ($b_0^{n-1}(t)$ na $[a, b]$ in $b_1^{n-1}(t)$ na $[a-h, b-h]$) sledi:

$$\begin{aligned} b_0^{n-1}(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} b[a - (n-1)h, a-jh, \dots, a-(n-2)h, b, b-h, \\ &\quad \dots, b-(j-1)h; h] B_j^{n-1}(t; [a, b]; h) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} b_j^0 B_j^{n-1}(t; [a, b]; h) \end{aligned}$$

in po enačbi (2.2)

$$\begin{aligned} b_1^{n-1}(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} b[b, a-(j+1)h, \dots, a-(n-1)h, b-h, \\ &\quad \dots, b-jh; h] B_j^{n-1}(t; [a-h, b-h]; h) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} b_{j-1}^0 B_j^{n-1}(t; [a-h, b-h], h) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}^0 B_j^{n-1}(t+h; [a, b]; h). \end{aligned}$$

Iz enačbe (4.4) sledi:

$$\begin{aligned}
b(t) &= (1 - \alpha_{n-1,0}(t)) \sum_{j=0}^{n-1} b_j^0 B_j^{n-1}(t; [a, b]; h) + \alpha_{n-1,0}(t) \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}^0 B_j^{n-1}(t+h; [a, b]; h) \\
&= (1 - \alpha_{n-1,0}(t)) B_0^{n-1}(t; [a, b]; h) b_0^0 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} ((1 - \alpha_{n-1,0}(t)) B_j^{n-1}(t; [a, b]; h) + \alpha_{n-1,0}(t) B_{j-1}^{n-1}(t+h; [a, b]; h)) b_j^0 \\
&\quad + \alpha_{n-1,0}(t) B_{n-1}^{n-1}(t+h; [a, b]; h) b_n^0 \\
&= \sum_{j=0}^n B_j^n(t; [a, b]; h) b_j^0.
\end{aligned}$$

Iz enačb (4.5) in (2.1) sledi:

$$\begin{aligned}
(1 - \alpha_{n-1,0}(t)) B_0^{n-1}(t; [a, b]; h) &= \frac{b-t+(n-1)h}{b-a+(n-1)h} B_0^{n-1}(t; [a, b]; h) = B_0^n(t; [a, b]; h), \\
\alpha_{n-1,0}(t) B_{n-1}^{n-1}(t+h; [a, b]; h) &= \frac{t-a}{b-a+(n-1)h} B_{n-1}^{n-1}(t+h; [a, b]; h) = B_n^n(t; [a, b]; h)
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
&(1 - \alpha_{n-1,0}(t)) B_j^{n-1}(t; [a, b]; h) + \alpha_{n-1,0}(t) B_{j-1}^{n-1}(t+h; [a, b]; h) \\
&= \frac{b-t+(n-1)h}{b-a+(n-1)h} \binom{n-1}{j} \frac{\prod_{l=0}^{j-1} (t-a+lh) \cdot \prod_{l=0}^{n-j-2} (b-t+lh)}{\prod_{l=0}^{n-2} (b-a+lh)} \\
&\quad + \frac{t-a}{b-a+(n-1)h} \binom{n-1}{j-1} \frac{\prod_{l=0}^{j-2} (t-a+(l+1)h) \cdot \prod_{l=0}^{n-j-1} (n-t+(l-1)h)}{\prod_{l=0}^{n-2} (b-a+lh)} \\
&= \binom{n}{j} \frac{\prod_{l=0}^{j-1} (t-a+lh) \cdot \prod_{l=0}^{n-j-2} (b-t+lh)}{\prod_{l=0}^{n-1} (b-a+lh)} \left[\left(\frac{n-j}{n} \right) (b-t+(n-1)h) \right] \\
&\quad + \left(\frac{j}{n} \right) (b-t-h) \\
&= B_j^n(t; [a, b]; h),
\end{aligned}$$

ker je izraz znotraj oklepajev v prejšnji vrstici enak $b - t + (n - j - 1)h$.

□

Posledica. 1 *h -Bernsteinove bazne funkcije stopnje n na intervalu $[a, b]$ tvorijo bazo za prostor polinomov stopnje $\leq n$.*

Posledica. 2 *h -Bézierove kontrolne točke h -Bézierove krivulje so na intervalu $[a, b]$ enolično določene.*

Posledica. 3 *h -Bézierove krivulje so afino invariantne.*

Dokaz. Naj bo dana h -Bézierova krivulja

$$b(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t; [a, b]; h) b_i.$$

Če premaknemo vsako kontrolno točko b_i , $i = 0, \dots, n$, za isti vektor v , se premakne tudi krivulja $b(t)$ za vektor v , ker velja:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t; [a, b]; h) (b_i + v) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t; [a, b]; h) b_i + \sum_{i=0}^n B_i^n(t; [a, b]; h) v = b(t) + v.$$

□

Ker velja, da so h -Bernsteinove bazne funkcije na intervalu $[a, b]$ za $h \geq 0$ in za $a \leq t \leq b$ nenegativne in tvorijo particijo enote, potem velja, da h -Bézierove krivulje ležijo v **konveksni ovojnici svojih kontrolnih točk** za vse $h \geq 0$. Če so kontrolne točke b_i kolinearne in enakomerno porazdeljene, je krivulja $b(t)$ linearno parametrizirana daljica.

Izrek 4.5 *(Dualna funkcijska lastnost h -razcveta). Naj bo $b(t)$ h -Bézierova krivulja na intervalu $[a, b]$ in naj bo $b[u_1, \dots, u_n]$ h -razcvet krivulje $b(t)$. Potem lahko izračunamo kontrolne točke h -Bézierove krivulje z:*

$$b_i = b[a - ih, \dots, a - (n - 1)h, b, b - h, \dots, b - (i - 1)h; h], i = 0, \dots, n.$$

Dokaz. Rezultat sledi neposredno iz izreka 4.4 in lastnosti, da so kontrolne točke h -Bézierove krivulje enolično določene. \square

Vmesne točke algoritma za izračun h -Bézierove krivulje s kontrolnimi točkami b_i , $i = 0, \dots, n$, označimo z $b_i^k(t)$. Za $k = 0, \dots, n$, $i = 0, \dots, n - k$ potem velja:

$$b_i^k(t) = \sum_{j=0}^k b_{i+j} B_k^j[t + ih; [a, b]; h].$$

Izrek 4.6 h -Bernsteinove bazne funkcije tvorijo particijo enote in velja:

$$1 \equiv \sum_{i=0}^n B_i^n(t; [a, b]; h). \quad (4.8)$$

Dokaz. Rezultat sledi iz dualne funkcijske lastnosti razcveta (enačba (4.7)). Naj bo $b(t) = 1$. Potem je $b[u_1, \dots, u_n] = 1$, torej

$$b[a - ih, \dots, a - (n - 1)h, b, \dots, b - (i - 1)h; h] = 1, i = 0, \dots, n.$$

Torej enačba (4.8) sledi neposredno iz dualne funkcijske lastnosti. \square

Izrek 4.7 Izraz (3.2) je za $b = a - nh$ Lagrangeova bazna funkcija za točke $t_i = a - ih$, za $i = 0, 1, \dots, n$.

Dokaz. Lagrangeova bazna funkcija je definirana kot:

$$L_k(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (t_k - t_j)}.$$

V našem primeru dobimo:

$$L_k = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (t - a + jh)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (j - k)h}.$$

Izrazimo:

$$\begin{aligned} \prod_{j=0, j \neq k}^n (j-k)h &= h^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (j-k) = h^n (-k(1-k) \cdot \dots \cdot (k-1-k)) \cdot \\ &\cdot (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)) = h^n (-1)^k k! (n-k)!. \end{aligned}$$

Rezultat združimo in dobimo:

$$L_k = \frac{1}{(-1)^k h^n k! (n-k)!} \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-a+jh).$$

Enačbo (3.2) razdelimo na tri dele.

Prvi del že ustreza naši rešitvi:

$$\prod_{j=0}^{k-1} (t-a+jh).$$

Pri drugem delu upoštevamo, da je $b = a - nh$ in $j = n - i$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-k-1} (b-t+ih) &= \prod_{j=k+1}^n (a-nh-t+(n-j)h) \\ &= \prod_{j=k+1}^n (-(t-a+jh)) \\ &= (-1)^{n-k} \prod_{j=k+1}^n (t-a+jh). \end{aligned}$$

Tretji del, kjer spet upoštevamo $j = n - i$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1} (b-a+ih) &= \prod_{i=0}^{n-1} (a-nh-a+ih) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (-(n-i))h = h^n (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} (n-i) \\ &= (-1)^n h^n \prod_{j=1}^n j = (-1)^n h^n n!. \end{aligned}$$

Dobimo:

$$\begin{aligned}
 B_k^n(t) &= \frac{\binom{n}{k} \prod_{j=0}^{k-1} (t - a + jh) (-1)^{n-k} \prod_{j=k+1}^n (t - a + jh)}{(-1)^n h^n n!} \\
 &= \frac{(-1)^{-k} \binom{n}{k} \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - a + jh)}{h^n n!} \\
 &= \frac{1}{(-1)^k h^n k! (n-k)!} \prod_{j=0, j \neq k}^n (t - a + jh).
 \end{aligned}$$

□

Poglavje 5

Algoritem

V tem poglavju si bomo ogledali algoritem za izračun h -razcveta, implementiran v programskem jeziku Matlab. Program bomo razdelili na tri dele.

Inicializacija parametrov

V prvem delu nastavimo kontrolne točke $T_i = (x_i, y_i)$ za $i = 0, \dots, n$, parameter h , interval $[a, b]$ in parametre h -razcveta u_1, \dots, u_n .

```
function [] = h_razcvet(X,Y,h,a,b,t)

%interval na katerem je definiran h-razcvet [a,b]
%a=1;
%b=2;

%kontrolne tocke x_i , y_i
%X=[1,2,3,4];
%Y=[1,4,6,1];
%parameter h
%h=1;

% nastavimo vrednosti parametrov h-razcveta
```

```

%Vrednosti parametrov u_i , za kontrolno tocko T_0
%U=[a,(a-h),(a-(2*h))];

%Vrednosti parametrov u_i , za kontrolno tocko T_1
%U=[a-h,a-(2*h),b];

%Vrednosti parametrov u_i , za kontrolno tocko T_2
%U=[b,a-(2*h),b-h];

%Vrednosti parametrov u_i , za kontrolno tocko T_3
%U=[b,b-h,b-(2*h)];

%Vrednost parametrov u_i za tocko na krivulji
%pri vrednosti parametra t
%t=1.5;
U=[t,t-h,t-2*h];

%koncni vrednosti h-razcveta
X_hrazcvet=h_razcvet_alg(X,h,a,b,U);
Y_hrazcvet=h_razcvet_alg(Y,h,a,b,U);

%funkcija za izris kontrolnega poligona in h-razcveta
plot(X,Y,X_hrazcvet,Y_hrazcvet,'*');

end

```

Glavni algoritem

Drugi del je glavni del programa. S prej nastavljenimi vrednostmi parametrov izračuna h -razcvet. Po izreku 4.2 z enačbo (4.1) nastavimo vrednosti Q_i^0 za $i = 0, \dots, n$. Rekurzivno enačbo (4.2) smo implementirali iterativno.

```
function [tocka]=h_razcvet_alg(X,h,a,b,U)

%X.. mnozica kontrolnih tock
%h.. parameter h
%a.. spodnja meja intervala
%b.. zgornja meja intervala
%U.. parametri razcveta u_1, u_2, u_3, ..., u_n

%matrika za trikotno shemo
A=zeros(length(X),length(X));

%zapisemo x v 1. stolpec A
A(:,1)=X';
n=length(X);

%stevca
k=0;
r=0;
for j=1:n-1

    u=U(j);

    for i=1:n-j

%izracunamo po preprosti formuli
        A(i,j+1)=((1-beta(u,k,r,a,b,h))*A(i,j))+
        +(beta(u,k,r,a,b,h)*A(i+1,j));

%po vsaki iteraciji povecamo indeks r
        r=r+1;
```

```

        end
%po vsaki iteraciji je treba spremenljivko r nastaviti na 0
        r=0;
        k=k+1;

end

tocka=A(1,n);

end

```

Pomožna funkcija

V zadnjem delu programa sem implementiral pomožno metodo, ki kot v izreku 4.2 izračuna (4.3).

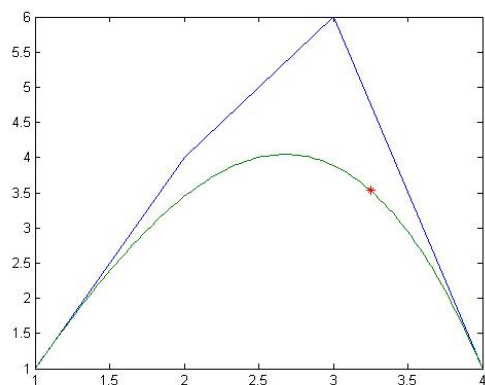
```

function [num]=beta(u,k,i,a,b,h)
    num=((u-a)+(i+k)*h)/((b-a)+k*h);
end

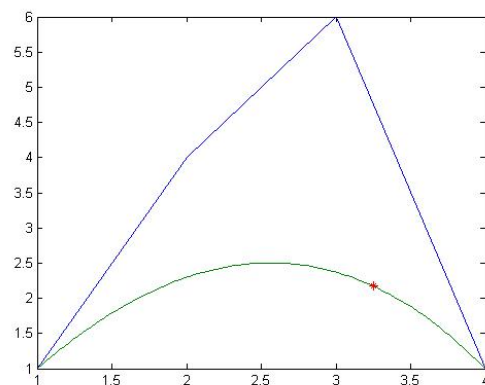
```

Rezultat

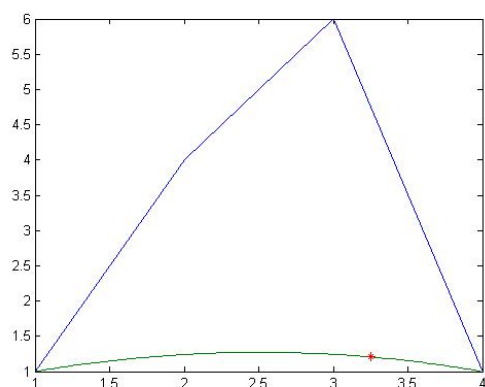
Rezultat algoritma je h -razcvet $b = [u_1, \dots, u_n; h]$ h -Bézierove krivulje s kontrolnimi točkami T_i pri vrednosti parametra h . Spodaj so primeri slik h -Bézierove krivulje in h -razcveta pri različnih vrednostih parametra h .



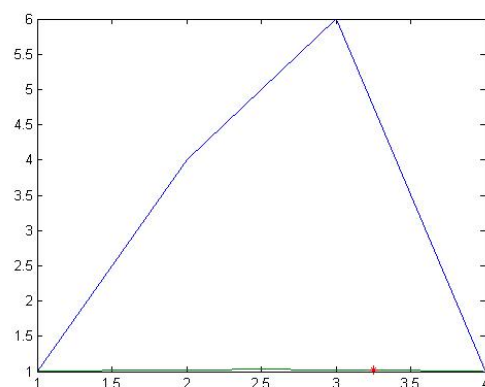
(a) Navadna Bézierova krivulja oziroma h -Bézierova krivulja pri $h = 0$



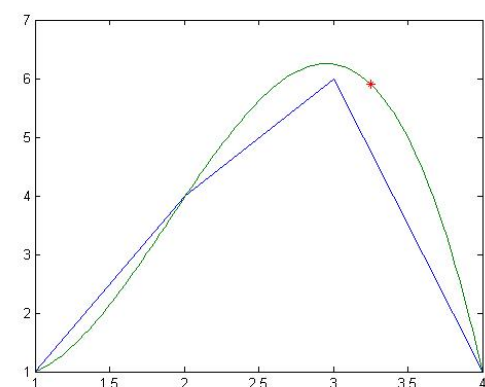
(b) h -Bézierova krivulja pri $h = 1$



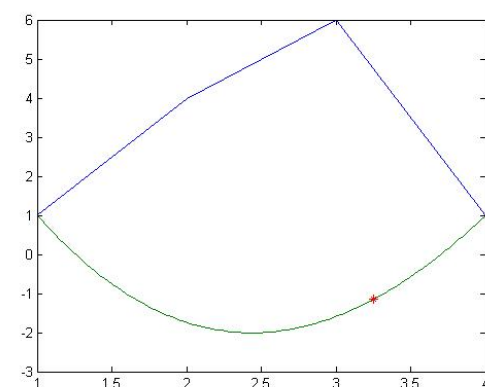
(c) h -Bézierova krivulja pri $h = 10$



(d) h -Bézierova krivulja pri $h = 100$



(e) h -Bézierova krivulja pri $h = -0,35$



(f) h -Bézierova krivulja pri $h = -2$

Slika 5.1: Na slikah so h -Bézierove krivulje z različnimi vrednostmi parametra h . Označena točka je h -razcvet pri vrednosti parametra $t = 1.75$

Poglavje 6

Sklepne ugotovitve

V diplomski nalogi smo opisali osnovne pojme računalniško podprtega geometrijskega oblikovanja. Dotaknili smo se zgodovine te obširne panoge in njenega namena v industrijskem oblikovanju, razvoju računalniških igrice in računalniških animacijah v filmih. Nadaljevali smo z uvajanjem parametra h , ki nam omogoča večji nadzor nad obliko Bézierovih krivulj. Spoznali smo, da parameter h poleg tega, da vpliva na obliko krivulje, omogoča tudi naravni prehod med interpolacijo in aproksimacijo za polinomske krivulje in ploskve.

Najpomembnejši del diplomske naloge je bil opis h -razcveta ter njegovih lastnosti. Zelo pomembna lastnost je, da h -razcvet izpolnjuje dualno funkcijsko lastnost za h -Bézierove krivulje. Dokazali smo njegov obstoj in enoličnost. Delo smo zaključili z razvojem algoritma za izračun vrednosti h -razcveta na poljubnem intervalu $[a, b]$ v programskem jeziku Matlab.

V nadaljnjem delu bi lahko izboljšali algoritem za izračun vrednosti h -razcveta. Namesto, da bi vračal vrednosti, bi lahko algoritem kot rezultat računa vrnil kar polinom h -razcveta za poljubno h -Bézierovo krivuljo. Zelo pomembno je tudi, da se iz h -razcveta lahko razvije še bolj napredne algoritme kot na primer delitev h -Bézierovih krivulj. S pomočjo h -Bernsteinovih baz se lahko razvije tudi bolj obširna teorija B-zlepkov.

Literatura

- [1] Gerald Farin, "A History of Curves and Surfaces in CAGD" *Handbook of computer aided geometric design*, Arizona State University, Tempe, 2002. Dostopno na:
<http://kowon.dongseo.ac.kr/~lbg/cagd/history1.pdf>
- [2] John C. Hart, skripta: "Advanced Topics in Computer Graphics", 2006. Dostopno na:
<http://www.cs.uiuc.edu/class/sp05/cs419/blossoms.ppt>
- [3] Gašper Jaklič, skripta: "Krivulje in ploskve v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju", 2011. Dostopno na:
<http://www.fmf.uni-lj.si/~jaklicg/CAGD.pdf>
- [4] Plamen Simeonov, Vasilis Zafiris, Ron Goldman, Computer Aided Geometric Design, "h-Blossoming: A new approach to algorithms and identities for h -Bernstein bases and h -Bézier curves", št. 28, str. 549-565, 2011.